Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **5** (2012) 74–80

УДК 517.977

О неглавных идеалах в полурешетке степеней перечислимости

Солон Б. Я., Тихов В. В.

Шуйский государственный педагогический университет

e-mail: tixov_valerii@mail.ru

получена 30 марта 2012

Ключевые слова: идеал степеней перечислимости, сводимость по перечислимости, иммунное множество

Эта статья посвящена изучению неглавных идеалов в полурешетке степеней перечислимости. Построены некоторые неглавные идеалы в верхней полурешетке.

Основные определения и обозначения такие же, как и в монографии Р.И. Соара «Вычислимо перечислимые множества и степени» [1]. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, ...\}$ – множество натуральных чисел, $A, B, C, ..., X, Y \subseteq \omega$. С интуитивной точки зрения, множество A e-сводится к множеству B (обозначение: $A \leq_e B$), если существует алгоритм, позволяющий по любому перечислению множества B получить некоторое перечисление множества A. Алгоритм, с помощью которого осуществляется сведение по перечислимости A к B, называется оператором перечисления или e-оператором. e-оператор с р.п. индексом n обозначается через Φ_n. Таким образом, $A \leq_e B \Leftrightarrow \exists n[A = \Phi_n(B)]$.

Пусть $A \equiv_e B$, если $A \leq_e B$ & $B \leq_e A$. Обозначим через $deg_e(A) = \{X : X \equiv_e A\}$ степень перечислимости или e-степень множества A. Пусть $\mathbf{D}_e$ – множество всех e-степеней. Введем на $\mathbf{D}_e$ отношение частичного порядка: $deg_e(A) \leq deg_e(B) \Leftrightarrow A \leq_e B$, тогда $\langle \mathbf{D}_e; \leq\rangle$ – частично упорядоченное множество. Для обозначения e-степеней будем использовать также жирные малые латинские буквы: $\mathbf{a} = deg_e(A), \mathbf{b} = deg_e(B), ...$ Будем писать $\mathbf{a} < \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \& \mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}$.

Достаточно легко проверить, что $\langle D_e; \leq\rangle$ – верхняя полурешетка с наименьшим элементом $\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – e-степень, состоящая из всех вычислимо перечислимых множеств. Обозначим через $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ наименьшую верхнюю грань e-степеней $\mathbf{a} = deg_e(A)$ и $\mathbf{b} = deg_e(B)$. Известно [2], что $\langle \mathbf{D}_e; \leq\rangle$ не является решеткой, т.е. существуют такие e-степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, для которых нет наибольшей нижней грани $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$.

Следуя Макэвойю [4], оператор скачка на $\mathbf{D}_e$ определяется следующим образом. Пусть $K_A = \{x : x \epsilon \Phi_x(A)\}$, тогда e-скачок множества A – это множество $\mathbf{J}(A) = K_A \oplus \bar{K}_A$. Можно доказать [5], что $\mathbf{J}(A) = A \oplus \bar{K}_A$. По определению, $\mathbf{a}' = deg_e(\mathbf{J}(A))$ –

e-скачок e-степени $\mathbf{a} = deg_e(A)$, $\mathbf{a}'' = (\mathbf{a}')' = deg_e(\mathbf{J}(\mathbf{J}(A)))$ – второй скачок e-степени $\mathbf{a}$ и т.д.

Пусть $\langle L; \leq, \vee\rangle$ – произвольная верхняя полурешетка, тогда непустое множество $\emptyset \neq I \subset L$ образует идеал, если I удовлетворяет условиям:

(1) $[a \epsilon L \ \& \ a \leq \mathrm{b} \ \& \ b \epsilon I] \Rightarrow a \epsilon I$, и

(2) $[a \epsilon I \ \& \ b \epsilon I] \Rightarrow a \vee b \epsilon I$.

Другими словами, $\emptyset \neq I \subset L$ образует идеал в верхней полурешетке $\langle L; \leq, \vee\rangle$, если I замкнуто относительно $\leq$ и $\vee$.

Наименьший по включению идеал в $\langle L; \leq\rangle$, содержащий элемент $a \epsilon A$, называется главным идеалом, порожденным элементом a. В случае верхней полурешетки $\emptyset \neq I \subset L$, главный идеал, порожденный элементом $a \epsilon A$, имеет вид $[a] = \{x : x \epsilon L \& x \leq a\}$.

Из приведенных определений следует, что верхняя полурешетка e-степеней $\langle \mathbf{D}_e; \leq, \vee\rangle$ обладает главными идеалами вида $[\mathbf{a}] = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \epsilon \mathbf{D}_e \& \mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a}$ – произвольная e-степень. Возникает естественный вопрос: существуют ли в $\langle \mathbf{D}_e; \leq, \vee\rangle$ неглавные идеалы, отличные от $\mathbf{D}_e$?

В следующей теореме дадим положительный ответ на этот вопрос. Пусть $\mathbf{b}_0 < \mathbf{b}_1 < \mathbf{b}_2 < ... < \mathbf{b}_n < ...$ счетная возрастающая последовательность e-степеней. Определим множество e-степеней $\mathbf{B} = \{\mathbf{x} : \exists n[\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_n]\}$.

Теорема 1. $\mathbf{B}$ – неглавный идеал в $\langle \mathbf{D}_e; \leq, \vee\rangle$, отличный от $\mathbf{D}_e$.

Доказательство. Докажем сначала, что B – идеал. Для этого проверим выполнимость условий (1) и (2). Пусть $\mathbf{a} \epsilon \mathbf{D}_e$ и $\mathbf{b} \epsilon \mathbf{B}$, тогда $\mathbf{b} \leq \mathbf{b} \leq b_n$ для некоторого $n \epsilon \omega$. Если $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}_n$, следовательно, $\mathbf{a} \epsilon \mathbf{B}$ и условие (1) выполнено. Пусть теперь $\mathbf{a}, \mathbf{b} \epsilon \mathbf{B}$, тогда $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}_k$ и $\mathbf{b} \leq \mathbf{b}_l$ для некоторых $k, l \epsilon \omega$. Ясно, что в этом случае $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}_n$ и $\mathbf{b} \leq \mathbf{b}_n$ для $n \overset{max}{=} \{k, l\}$. Так как $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ – наименьшая верхняя грань e-степеней $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \leq \mathbf{b}_n$. Следовательно, $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \epsilon \mathbf{B}$ и условие (2) выполнено.

Докажем, что $\mathbf{B}$ не является главным идеалом. Предположим, что $\mathbf{B} = [\mathbf{b}]$ для некоторой e-степени $\mathbf{b}$. Тогда, в частности, $\mathbf{b} \epsilon \mathbf{B}$, и поэтому $\mathbf{b} \leq \mathbf{b}_n$ для некоторого $n \epsilon \omega$. Так как, по построению, $\mathbf{b}_{n+1} > \mathbf{b}_n$, то, с одной стороны, $\mathbf{b}_{n+1} \notin [\mathbf{b}] = \mathbf{B}$ и, с другой стороны, $\mathbf{b}_{n+1} \epsilon \mathbf{B}$. Получено противоречие, которое возникло из-за предположения о том, что $\mathbf{B}$ – главный идеал.

Наконец, заметим, что $\mathbf{D}_e$ – несчетное множество, в то время как $\mathbf{B} = \cup_{n \epsilon \omega} \mathbf{B}_n$ – счетное множество, так как является счетным объединением счетных множеств $\mathbf{B}_n = [\mathbf{b}_n]$. Следовательно, $\mathbf{D}_e \neq \mathbf{B}$. Теорема доказана.

Другой пример неглавного идеала дает нетривиальный результат Купера [6]. В приведенной статье доказано, что существует e-степень $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$, такая, что $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} < \mathbf{0}'$ для всех e-степеней $\mathbf{b} < \mathbf{0}'$. Обозначим через $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} : \forall \mathbf{y}[\mathbf{y} < \mathbf{0}' \Rightarrow \mathbf{x} \vee \mathbf{y} < \mathbf{0}']\}$. Из этого результата следует, что $\mathbf{S} \neq \emptyset$.

Теорема 2. $\mathbf{S}$ – идеал, не являющийся главным идеалом.

Доказательство. Сначала докажем, что $\mathbf{S}$ является идеалом. Пусть $\mathbf{b} \epsilon \mathbf{S}$, тогда $\forall \mathbf{y}[\mathbf{y} < \mathbf{0}' \Rightarrow \mathbf{b} \vee \mathbf{y} < \mathbf{0}']$ и $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ – произвольная e-степень, докажем, что $\mathbf{a} \epsilon \mathbf{S}$. Для этого проверим выполнимость условия $\forall \mathbf{y}[\mathbf{y} < \mathbf{0}' \Rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{y} < \mathbf{0}']$. Так как $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \vee \mathbf{y} \leq \mathbf{b} \vee \mathbf{y}$ для всех e-степеней $\mathbf{y}$, поэтому $\forall \mathbf{y}[\mathbf{y} < \mathbf{0}' \Rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{y} < \mathbf{0}']$ и $\mathbf{a} \epsilon \mathbf{S}$. Итак, условие (1) выполнено.

Теперь проверим выполнимость условия (2). Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \epsilon \mathbf{S}$, тогда $\forall \mathbf{y}[\mathbf{y} < \mathbf{0}' \Rightarrow$

$\mathbf{a} \vee \mathbf{y} < \mathbf{0}']$ и $\forall \mathbf{y}[\mathbf{y} < \mathbf{0}' \Rightarrow \mathbf{b} \vee \mathbf{y} < \mathbf{0}']$. Докажем, что в этом случае $\forall \mathbf{y}[\mathbf{y} < \mathbf{0}' \Rightarrow (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{y} < \mathbf{0}']$. Сначала докажем лемму.

Лемма 1. $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{c} = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee \mathbf{b}$ для любых e-степеней $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = deg_e(A)$, $\mathbf{b} = deg_e(B)$ и $\mathbf{c} = deg_e(C)$, тогда $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{c} = deg_e((A \oplus B) \oplus C)$. По определению операции сочленения $\oplus$ имеем

$$(A \oplus B) \oplus C = \{2x : x \epsilon A \oplus B\} \cup \{2x+1 : x \epsilon C\} =$$
$$= \{4x : x \epsilon A\} \cup \{4x+2 : x \epsilon B\} \cup \{2x+1 : x \epsilon C\}$$

и

$$A \oplus (B \oplus C) = \{2x : x \epsilon A\} \cup \{2x+1 : x \epsilon B \oplus C\} =$$
$$= \{2x : x \epsilon A\} \cup \{4x+1 : x \epsilon B\} \cup \{4x+3 : x \epsilon C\}.$$

Из определения e-сводимости следует, что $(A \oplus B) \oplus C \leq_e A \oplus (B \oplus C)$ и наоборот, следовательно, $(A \oplus B) \oplus C \equiv_e A \oplus (B \oplus C)$. Это означает, что $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{c} = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{c})$. Аналогично доказывается, что $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{c} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee \mathbf{b}$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{0}'$ – произвольная e-степень, тогда в силу леммы $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{y} = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{y})$, а по предположению теоремы $\mathbf{b} \vee \mathbf{y} < \mathbf{0}'$, тогда из условия $\forall \mathbf{z}[\mathbf{z} < \mathbf{0}' \Rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{z} < \mathbf{0}']$ для $\mathbf{z} = \mathbf{b} \vee \mathbf{y}$ следует, что $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{y} = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{y}) < \mathbf{0}'$. Итак, условие (1) выполнено и $\mathbf{S}$ – идеал.

Докажем, что $\mathbf{S}$ не является главным идеалом. Теорема Купера [6] допускает следующую релятивизацию.

Лемма 2. Для любой e-степени $\mathbf{s} < \mathbf{0}'$ существует e-степень $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$, такая, что $\mathbf{a} \nleq \mathbf{s}$ и $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} < \mathbf{0}'$ для всех e-степеней $\mathbf{b} < \mathbf{0}'$.

Доказательство леммы 2 дословно повторяет доказательство теоремы Купера с добавлением шагов, удовлетворяющих требованию $\mathbf{a} \nleq \mathbf{s}$.

Завершим доказательство теоремы 2. Если предположить что S – главный идеал, т.е. $\mathbf{S} = [\mathbf{s}]$ для некоторой e-степени $\mathbf{s} < \mathbf{0}'$, то по лемме 2 существует e-степень $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$, такая, что $\mathbf{a} \nleq \mathbf{s}$ и $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} < \mathbf{0}'$ для всех e-степеней $\mathbf{b} < \mathbf{0}'$. Первое утверждение означает, что $\mathbf{a} \notin \mathbf{S}$, второе – что $\mathbf{a} \epsilon \mathbf{S}$. Получено противоречие, которое показывает, что $\mathbf{S}$ не является главным идеалом. Теорема полностью доказана.

Известно, что верхняя полурешетка e-степеней $\mathbf{D}_e$ не имеет минимальных элементов. Напомним, что элемент $a \epsilon L$ называется минимальным элементом частично упорядоченного множества $\langle L; \leq \rangle$, если $a \neq 0$ и $\forall x[x \epsilon L \& x \leq a \Rightarrow x = 0 \vee a \leq x]$. Следовательно, в $\mathbf{D}_e$ выполнено следующее утверждение: $\forall \mathbf{x}[\mathbf{x} > 0 \Rightarrow \exists \mathbf{y}[\mathbf{0} < \mathbf{y} < \mathbf{x}]]$, из которого следует, что любой главный идеал (кроме тривиального [0], состоящего только из нулевой e-степени,) является счетным. Отсюда следует также, что $\mathbf{D}_e$ не имеет конечных идеалов, кроме тривиального, так как вместе с любым своим элементом идеал должен содержать целиком главный идеал, порожденный этим элементом.

В теореме 1 дан пример неглавного счетного идеала. Теперь построим неглавный счетный идеал, обладающий некоторым наперед заданным свойством. В данном случае будет построен неглавный идеал, не содержащий данную е-степень $\mathbf{a} = deg_e(A)$.

Сначала докажем ряд вспомогательных утверждений, имеющих самостоятельный характер. Введем ряд обозначений и понятий, необходимых для описания конструкций и доказательств. Как и принято в монографии Соара, $W_n, n\epsilon\omega$ – вычислимо перечислимое (в.п.) множество с вычислимо перечислимым индексом n, D_u, $u\epsilon\omega$ – конечное множество с каноническим индексом u, $D_0 = \emptyset$, $\langle k, l\rangle$ – канторовский номер упорядоченной пары (k, l), π_1 и π_2 – обратные функции: $\pi_1(\langle k, l\rangle) = k$ и $\pi_2(\langle k, l\rangle) = l$. Теперь нам понадобится формальный аналог интуитивного определения e-сводимости множеств. Дадим его в таком виде, какой использует X. Роджерс в своей монографии [8]:

$$A \leq_e B \Leftrightarrow (\exists n)(\forall x)[x\epsilon A \Leftrightarrow (\exists u)[\langle x, u\rangle \epsilon W_n \& D_u \subseteq B]] \Leftrightarrow \exists n[A = \Phi_n(B)]$$

Множество $A \subseteq \omega$ называется иммунным, если A бесконечно и не содержит бесконечных в.п. множеств. Другими словами,

A иммунно $\Leftrightarrow |A| = \infty \& \forall n[|W_n| = \infty \Rightarrow \bar{A} \cap W_n \neq \emptyset]$.

Пусть A – какое-либо иммунное множество, зафиксируем его для всех последующих рассуждений.

Лемма 3. Существует множество $B \subseteq \omega$, такое, что $A \nleq_e B$.

Доказательство. Чтобы получить множество B, построим по шагам последовательность множеств $\{B_s\}_{s\epsilon\omega}$, в которой $B_s \subseteq B_{s+1}$ для всех $s\epsilon\omega$. Пусть F – переменная для конечных множеств и $\omega_s = \omega - \{0, 1, ..., x_s\}$

Шаг 0. Полагаем $B_0 = \emptyset$ и $x_0 = 0$.

Шаг s+1. Предположим, что B_s уже построено на шаге s. Проверим выполнимость условия

$$\exists F[F \subset \omega_s \& \Phi_s(B_s \cup F) \nsubseteq A]. \tag{1}$$

Если (1) выполнено, то полагаем $B_{s+1} = B_s \cup F^*$, где F^* - конечное множество с наименьшим каноническим индексом, удовлетворяющее условию (1). Если (1) не выполнено, то имеет место

$$\forall F[F \subset \omega_s \Rightarrow \Phi_s(B_s \cup F) \subseteq A]. \tag{2}$$

В этом случае полагаем $B_{s+1} = B_s$. При любом исходе полагаем $x_{s+1} = maxB_{s+1}$.

Пусть $B = \cup_{s\epsilon\omega} B_s$. Докажем, что $A \nleq_e B$. Предположим, что $A \leq_e B$, тогда $A = \Phi_s(B)$ для некоторого s. Рассмотрим шаг $s + 1$. Если условие (1) выполнено, тогда из $B_{s+1} \subseteq B \Rightarrow \Phi_s(B_{s+1}) \subseteq \Phi_s(B)$ следует, что $\Phi_s(B) \nsubseteq A$. Следовательно, равенство $A = \Phi_s(B)$ в этом случае невозможно.

Итак, на этом шаге должно выполняться условие (2). Докажем, что в этом случае $\Phi_s(B)$ – конечное множество. А так как любое иммунное множество бесконечно, то и в этом случае равенство $A = \Phi_s(B)$ невозможно.

Заметим, что $\forall F[F \subset \omega_s \Rightarrow \Phi_s(B_s \cup F) \subseteq A] \Rightarrow \Phi_s(B_s \cup \omega_s) \subseteq A$. В самом деле, если $\Phi_s(B_s \cup \omega_s) \subseteq A$, то $\exists F[F \subset (B_s \cup \omega_s) \& \Phi_s(F) \nsubseteq A]$. В этом случае для $F' = F - B_s$ выполнено $F' \subset \omega_s \& \Phi_s(B_s \cup F') \nsubseteq A$, что противоречит выполнимости условия (2).

Итак, $\Phi_s(B_s \cup \omega_s) \subseteq A$. Так как $B_s \cup \omega_s$ – вычислимое множество, то $\Phi_s(B_s \cup \omega_s)$ – вычислимо перечислимое множество, а так как $\Phi_s(B_s \cup \omega_s) \subseteq A$, то в силу иммунности множества A, $\Phi_s(B_s \cup \omega_s)$ – конечное множество. Наконец, $B \subseteq \Phi_s(B_s \cup \omega_s) \Rightarrow \Phi_s(B) \subseteq \Phi_s(B_s \cup \omega_s)$, поэтому $\Phi_s(B)$ – конечное множество. Лемма полностью доказана.

Лемма 4. Для любого множества B, такого, что $A \not\leq_e B$, существует множество $M \subseteq \omega$, такое, что $B <_e M$ и $A \not\leq_e M$.

Доказательство. Для построения множества M применим конструкцию, подобную той, которая использовалась для доказательства предыдущей леммы.

Множество M будет иметь вид $M = B \oplus \cup_{t \epsilon \omega} M_t$, где последовательность множеств $\{M_t\}_{t \epsilon \omega}$ строится в ходе конструкции так, чтобы $M_t \subseteq M_{t+1}$ для всех $s \epsilon \omega$. Пусть F – переменная для конечных множеств и $\omega_t = \omega - \{0, 1, ..., x_t\}$.

Шаг 0. Полагаем $M_0 = \emptyset$ и $x_0 = 0$.

Шаг 2s+l. Пусть $t = 2s$. Предположим, что M_t уже построено на шаге s. Проверим выполнимость условия

$$\Phi_s(B) \subseteq B \oplus M_t. \tag{3}$$

Если (3) выполнено, то полагаем $M_{t+1} = M_t \cup \{x_t + 1\}$. Если (3) не выполнено, то имеет место

$$\Phi_s(B) \not\subseteq B \oplus M_t. \tag{4}$$

В этом случае $\exists y[y \epsilon \Phi_s(B) - (B \oplus M_t)]$. Обозначим через y^* наименьшее y, удовлетворяющее этому условию. Полагаем $M_{t+1} = M_t \cup \{y^* + 1\}$. При любом исходе полагаем $x_{t+1} = max M_{t+1}$.

Шаг 2s+2. Пусть $t = 2s + 1$. Проверим выполнимость условия

$$\exists F[F \subset \omega_t \& \Phi_s(B \oplus (M_t \cup F)) \not\subseteq A]. \tag{5}$$

Если (5) выполнено, то полагаем $M_{t+1} = M_t \cup F^*$, где F^* - конечное множество с наименьшим каноническим индексом, удовлетворяющее условию (5). Если (5) не выполнено, то имеет место

$$\forall F[F \subset \omega_t \Rightarrow \Phi_s(B \oplus (M_t \cup F)) \subseteq A]. \tag{6}$$

В этом случае полагаем $M_{t+1} = M_t$. При любом исходе полагаем $x_{t+1} = max M_{t+1}$.

Докажем сначала, что $B <_e M$, т.е. что $B \leq_e M$ и $M \not\leq_e B$. То, что $M = B \oplus \cup_{t \epsilon \omega} M_t$ обеспечивает сводимость $B \leq_e M$. Если $M \leq_e B$, то $M = \Phi_s(B)$ для некоторого s. Рассмотрим шаг $2s + 1$. В случае выполнения условия (3) имеем $\Phi_s(B) \subseteq B \oplus M_t \subset B \oplus M_{t+1} \subset M$, т.е. $M \neq \Phi_s(B)$. В случае выполнения условия (4) $y^* \notin B \oplus \omega_{t+1}$, а т.к. $M \subset B \oplus \omega_{t+1}$, то $y^* \notin M$. Итак, $y^* \epsilon \Phi_s(B) - M$, и в этом случае $M \neq \Phi_s(B)$. Следовательно, в любом случае $M \not\leq_e B$.

Предположим теперь, что $A \leq_e M$, тогда $A = \Phi_s(M)$ для некоторого s. Рассмотрим шаг 2s+2. Если условие (5) выполнено, то $\Phi_s(B \oplus M_{t+1}) \not\subseteq A$, а так как $B \oplus M_{t+1} \subseteq M \Rightarrow \Phi_s(B \oplus M_{t+1}) \subseteq \Phi_s(M)$. Следовательно, равенство $\Phi_s(M) = A$ в этом случае невозможно.

Итак, на этом шаге должно выполняться условие (4). Тогда $\Phi_s(B \oplus (M_t \cup \omega_t)) \subseteq A$ для некоторого t. Кроме того,

$$\Phi_s(M) \subseteq \Phi_s(B \oplus (M_t \cup \omega_t)) \subseteq A = \Phi_s(M).$$

Следовательно, $\Phi_s(B \oplus (M_t \cup \omega_t)) = A$. Это означает, что $A \leq_e B \oplus (M_t \cup \omega_t)$, откуда следует, что $A \leq_e B$. Это противоречит условию леммы. Итак, $A \not\leq_e M$ и лемма доказана.

Теорема 3. Пусть A – иммунное множество и $\mathbf{a} = deg_e(A)$. Существует счетный идеал B, не содержащий e-степень $\mathbf{a}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\Im$ всевозможных семейств линейно упорядоченных e-степеней $\mathbf{b}_0 < \mathbf{b}_1 < ... < \mathbf{b}_n$, таких, что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}_i$ для всех $i = 1, ..., n$. Заметим, что такие семейства существуют для каждого $n\epsilon\omega$. В самом деле, если в качестве B_0 взять множество B, построенное в лемме 3, то e-степень $\mathbf{b}_0 = deg_e(B_0)$ образует семейство, состоящее из одной e-степени, удовлетворяющее данному требованию. Пусть $\mathbf{b}_0 < \mathbf{b}_1 < ... < \mathbf{b}_n$, такие, что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}_i$ для всех $i = 1, ..., n$, и $\mathbf{b}_n = deg_e(B_n)$, причем $A \not\leq_e B_n$. Если в лемме 4 в качестве B взять множество B_n, то множество $B_{n+1} = M$ дает e-степень $\mathbf{b}_{n+1} = deg_e(B_{n+1})$, такую что $\mathbf{b}_0 < \mathbf{b}_1 < ... < \mathbf{b}_n < \mathbf{b}_{n+1}$ и $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}_i$ для всех $i = 1, ..., n, n+1$.

Докажем, что существует счетное линейно упорядоченное множество e-степеней $\mathbf{b}_0 < \mathbf{b}_1 < ... < \mathbf{b}_n < ...$, таких что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}_i$ для всех $i\epsilon\omega$. Множество $\Im$ частично упорядочено отношением теоретико-множественного включения $\subseteq$. По лемме Цорна существует максимальное линейно упорядоченное семейство $\mathscr{B}$, удовлетворяющее нашему требованию. Предположим, что семейство $\mathscr{B}$ конечно. Пусть $\mathbf{b}_0 < \mathbf{b}_1 < ... < \mathbf{b}_n$, такие, что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}_i$ для всех $i = 1, ..., n$, образуют семейство $\mathscr{B}$. Тогда с помощью леммы 4 можно построить -степень $\mathbf{b}_{n+1}$, такую что $\mathbf{b}_0 < \mathbf{b}_1 < ... < \mathbf{b}_n < \mathbf{b}_{n+1}$ и $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}_i$ для всех $i = 1, ..., n, n+1$. В этом случае мы получаем противоречие с максимальностью семейства $\mathscr{B}$, откуда следует, что $\mathscr{B}$ не может быть конечным множеством. Итак, существует счетное линейно упорядоченное множество e-степеней $\mathbf{b}_0 < \mathbf{b}_1 < ... < \mathbf{b}_n < ... <...$, таких что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}_i$ для всех $i\epsilon\omega$.

Обозначим через $\mathbf{B} = \{\mathbf{x} : \exists n[\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_n]\}$. Точно так же, как было показано при доказательстве теоремы 1, проверяется, что $\mathbf{B}$ – неглавный идеал в $\langle \mathbf{D}_e; \leq, \vee \rangle$. Так как $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}_i$ для всех $i\epsilon\omega$, то $\mathbf{a} \notin \mathbf{B}$. Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Соар Роберт И. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество, 2000. Soare Robert I. Recursively Enumerable Sets and Degrees. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1987

2. Case J. Enumeration reducibility and partial degrees // Ann. Math. Logic. 1970. 2. P. 419–439.

3. Cooper S.B. Partial degrees and the density problem. Part 2: The enumeration degrees of the 2/j sets are dense // J. Symb. Logic. 1984. 49. P. 503–513

4. McEvoy K. Jumps of quasi-minimal enumeration degrees // J. Symb. Logic. 1985. 50. P. 839–848.

5. Поляков Е.А., Розинас М.Г. Теория алгоритмов: Учебное пособие. Иваново: Изд-во ИвГУ, 1976.

6. Cooper S.B., Sorbi A., Yi X. Cupping and noncupping in the e-degrees of sets // Annals of Pure and Applied Logic. 1997. 82. P. 317–342.

7. Gutteridge L. Some results on e-reducibility. Ph.D.Diss., Simon Fraser University, Burnaby, 1971.

8. Роджерс Х. Теория вычислимых функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

About Not Countable Ideals in a Semi-Lattice of the Enumeration Degrees

Solon B. I., Tikhov V. V.

Keywords: ideals enumeration degrees, enumeration reducible, immune set

This paper is dedicated to the study of ideals in semi-lattice of the enumeration degrees.

Сведения об авторах:
Солон Борис Яковлевич,
Шуйский государственный педагогический университет,
доктор физ.-мат. наук;
Тихов Валерий Валерьевич,
Шуйский государственный педагогический университет,
аспирант